TD n°8: Le théorème de représentation conforme

Analyse complexe 2025-2026, Thomas Serafini
tserafini@dma.ens.fr

Les exercices marqués d'un [†] sont à faire en priorité, ceux marqués d'un [†] sont des exercices complémentaires, à faire pour aller plus loin.

Exercice 1. Des équivalences conformes.
On note $S_\alpha := \{z \in \mathbb{C}^* : |\arg z| < \alpha\}$ où $0 < \alpha \leqslant \pi$. Démontrer que les fonctions holomorphes suivantes sont des équivalences conformes, et expliciter leurs inverses :

1. La transformation $z \mapsto i\frac{1+z}{1-z}$ de $\mathbb{D}$ vers $\mathbb{H}$.
2. Pour $0 < \alpha\beta \leqslant \pi$, la fonction $z \mapsto z^\beta$ de S_α vers $S_{\alpha\beta}$.
3. La *transformation de Koebe* $K(z) := \frac{z}{(1-z)^2}$ de $\mathbb{D}$ vers $\mathbb{C}\setminus\ ]-\infty, -1/4]$.
4. La transformation $L(z) := \log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$ de $\mathbb{D}$ vers $\{w \in \mathbb{C} : |\Im w| < \pi/2\}$.
5. La *transformation de Joukowski* $J(z) := \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ de $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ vers $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$.

Exercice 2. Unicité dans le théorème de la représentation conforme.

1. Démontrer qu'il existe un unique biholomorphisme φ de $\mathbb{D}$ qui vérifie $\varphi(0) = 0$ et $\varphi'(0) \in \mathbb{R}_{>0}$.
2. Soient U, V deux ouverts simplement connexes de $\mathbb{C}$ biholomorphes à $\mathbb{D}$, $u \in U, v \in V$. Démontrer qu'il existe un unique biholomorphisme $f : U \to V$ qui envoie u sur v et vérifie $f'(u) \in \mathbb{R}_{>0}$.
Si $V = \mathbb{D}, v = 0$, on appelle $\frac{1}{f'(u)}$ le rayon conforme de U en u, noté $R(U, u)$
3. Calculer les rayons conformes suivants :
   (a) $R(\mathbb{D}(0, r), 0)$, $R(\mathbb{D}(0, 2), 1)$,
   (b) $R(\mathbb{H}, i)$,
   (c) $R(U, 0)$ avec $U = \mathbb{C}\setminus\ ]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$.
   Indication : pour trouver une équivalence conforme dans ce dernier exemple, on pourra penser à la transformation de Joukowski.

Exercice 3. Biholomorphismes entre couronnes.
On pose $C(r, R) = \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < R\}$.

1. Soient $1 < R_1, R_2$ et supposons qu'on a un biholomorphisme $f : C(1, R_1) \to C(1, R_2)$. Démontrer que quitte à considérer R_2/f, on peut supposer que $|f| \to 1$ quand $|z| \to 1$ et $|f| \to R_2$ quand $|z| \to R_1$.
2. En déduire que la fonction harmonique $\log|f| - \frac{\log(R_2)}{\log(R_1)} \log|z|$ s'étend au bord de $C(1, R_1)$ et y est nulle.
3. En considérant une détermination locale du logarithme de f au voisinage de 1, démontrer qu'on doit avoir, au moins sur un voisinage de 1 dans $C(1, R_1)$, $f(z) = Cz^\alpha$ où on spécifiera α.
4. Démontrer que si $\alpha \notin \mathbb{Z}$, il n'existe pas de fonction holomorphe sur $C(1, R)$ qui vérifie $f'/f = \frac{\alpha}{z}$.
5. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une équivalence conforme de $C(r_1, R_1)$ vers $C(r_2, R_2)$.
6. Expliciter les biholomorphismes de $C(r, R)$ et démontrer que le groupe des biholomorphismes est isomorphe au produit semi-direct
$$\mathbb{U} \rtimes \{\pm 1\}.$$

[†] Merci à Hadrien et Louise pour ce phoque et ce raton-laveur en Tikz.

Exercice 4. Fonctions harmoniques.
On rappelle que $z \mapsto i\frac{1+z}{1-z}$ est une équivalence conforme entre $\mathbb{D}$ et $\mathbb{H}$.

1. Trouver une équivalence conforme de $\{\Re(z) > 0\}$ vers $\{-\pi/2 < \Im(z) < \pi/2\}$.
2. Trouver une fonction harmonique u sur $\mathbb{D}$ qui vérifie $u(z) \to -1$ quand $z \to \zeta$ si $|\zeta| = 1$, $\Im(\zeta) < 0$ et $u(z) \to 1$ quand $z \to \zeta$ si $|\zeta| = 1$, $\Im(\zeta) > 0$.

Exercice 5. Représentations conformes entre rectangles.
On admet le théorème suivant (qui sera prouvé dans un TD futur).
Théorème (Principe de réflexion de Schwarz) :
Soit $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert symétrique par rapport à $\mathbb{R}$. Supposons que f est une fonction continue sur $\Omega \cap \{\Im(z) \geqslant 0\}$, qui prend des valeurs réelles sur $\Omega \cap \mathbb{R}$ et est holomorphe sur $\Omega \cap \{\Im(z) > 0\}$. Alors il existe un unique prolongement holomorphe de f à Ω, donné par $f(\overline{z}) = \overline{f(z)}$.

Soient R_1, R_2 deux rectangles dans $\mathbb{C}$ et $\varphi : R_1 \to R_2$ une équivalence conforme, s'étendant aux bords et qui envoie les coins de R_1 sur ceux de R_2.
Démontrer que φ s'étend en un biholomorphisme de $\mathbb{C}$, c'est-à-dire qu'il existe $\tilde{\varphi} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ biholomorphisme tel que $\varphi = \tilde{\varphi}|_{R_1}$.

Exercice 6. Les polynômes de Faber
Soit K un compact connexe du plan ayant au moins deux points et tel que $\Omega = \mathbb{C} \setminus K$ soit connexe. On suppose pour plus de simplicité que K contient 0.

1. Montrer que Ω est biholomorphe à $\mathbb{D} \setminus \{0\}$, puis à $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$.
2. Expliciter une telle représentation conforme dans le cas où $K = [-1, 1]$.
3. Notons $\Phi \colon \Omega \to \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ la représentation conforme obtenue. Démontrer que Φ a un pôle simple à l'infini. On définit alors le *n-ième polynôme de Faber associé à K*, F_n comme étant la partie polynomiale de Φ^n i.e.
$$F_n(z) = \Phi(z)^n + O_\infty(1/z).$$
4. Calculer les polynômes de Faber dans le cas $K = \overline{\mathbb{D}}(0, r)$ avec $r > 0$.
5. Démontrer que pour $z \in K$, et n'importe quel contour simple C^1 par morceaux dans Ω, on a
$$F_n(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\Phi(\zeta)^n}{\zeta - z} d\zeta.$$
6. Soit Ψ l'application réciproque de Φ. Démontrer que si $z \in K$ et γ est un contour dans Ω tel que $|w| > \sup_t |\Psi(\gamma(t))|$, alors :
$$\frac{\Psi'(w)}{\Psi(w) - z} = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{1}{\zeta - z} \frac{1}{w - \Phi(\zeta)} d\zeta$$
et en déduire que pour tout $|w| > 1$, on a
$$\frac{\Psi'(w)}{\Psi(w) - z} = \sum_{n \geqslant 0} \frac{F_n(z)}{w^{n+1}}$$
avec convergence uniforme sur $|w| \geqslant 1 + \varepsilon$.
7. Si U est un ouvert connexe contenant K et si $f \in \mathcal{O}(U)$, montrer que f se développe sur K en série de polynômes de Faber associés à K et que cette série converge uniformément sur K.